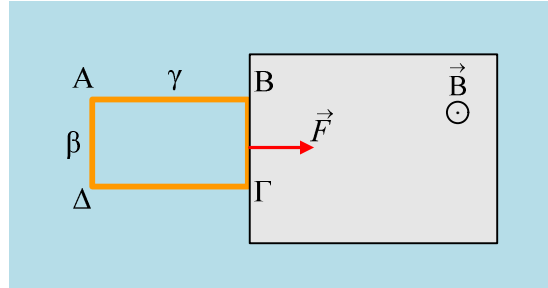


Μια είσοδος στο πεδίο με σταθερή επιτάχυνση

Το ορθογώνιο άκαμπτο μεταλλικό πλαίσιο ΑΒΓΔ, με πλευρές $\beta=0,5\text{m}$ και $\gamma=0,8\text{m}$, έχει αντίσταση $R=0,8\Omega$ και μάζα $m=0,75\text{kg}$, ηρεμεί δε, σε λείο μονωτικό οριζόντιο επίπεδο, με την πλευρά του ΒΓ σε επαφή με περιοχή που υπάρχει ένα ομογενές κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο έντασης $B=2\text{T}$, όπως στο σχήμα (κάτοψη). Σε μια στιγμή $t=0$, ασκούμε στο μέσον της πλευράς ΒΓ μια μεταβλητού μέτρου, οριζόντια δύναμη F , κάθετη στην ΒΓ, με αποτέλεσμα το πλαίσιο να αποκτήσει μια σταθερή επιτάχυνση $a=0,4\text{m/s}^2$ και να αρχίσει την είσοδό του στο πεδίο.



Α) Θεωρώντας την κάθετη στο πλαίσιο να έχει φορά ίδια με την ένταση του πεδίου, ζητούνται για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 2,5\text{s}$, όπου τη στιγμή $t'=2,5\text{s}$, όλο το πλαίσιο βρίσκεται εντός του πεδίου, οι γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο:

- i) Της μαγνητικής ροής που διέρχεται από το πλαίσιο.
- ii) Της ηλεκτρεγερτικής δύναμης που αναπτύσσεται στο πλαίσιο.
- iii) Της ηλεκτρικής ισχύος που εμφανίζεται στο πλαίσιο.

Β) Για την χρονική στιγμή $t_1=1,5\text{s}$, να βρεθούν:

- v) Η οριζόντια δύναμη F που είναι απαραίτητη να ασκούμε στο πλαίσιο για την κίνησή του, καθώς και η ισχύς της.
- v) Η αντίστοιχη ισχύς της δύναμης Laplace που ασκείται στο πλαίσιο από το μαγνητικό πεδίο, καθώς και ισχύς της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο.
- vi) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του πλαισίου.

Απάντηση:

i) Έστω ότι τη στιγμή t το πλαίσιο έχει μετατοπισθεί κατά x , όπου $x = \frac{1}{2}at^2$, ευρισκόμενο στη θέση που δείχνει το σχήμα.

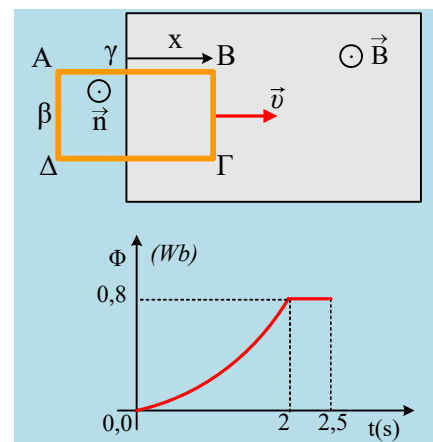
Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του πλαισίου τη στιγμή αυτή είναι:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \sin\alpha = B \cdot S = B \cdot \beta \cdot x = B \cdot \beta \cdot \frac{1}{2}at^2 \rightarrow$$

$$\Phi = 0,2 \cdot t^2 \quad (S.I.)$$

Αφού η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \vec{B} και \vec{n} είναι $\alpha=0^\circ$.

Η παραπάνω σχέση ισχύει μέχρι να ολοκληρωθεί η είσοδος του πλαισίου στο μαγνητικό πεδίο, δηλαδή μέχρι τη στιγμή όπου $x=\gamma$, ή τη στιγμή:



$$t = \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{0,4}} \text{ s} = 2\text{s}$$

Από κει και πέρα και μέχρι να αρχίσει η έξοδος από το πεδίο, η ροή παραμένει σταθερή με τιμή:

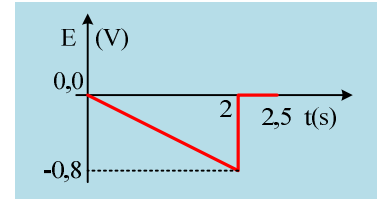
$$\Phi = B \cdot \beta \cdot \gamma = 0,8 \text{ Wb}$$

Με βάση αυτά η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι όπως στο παραπάνω σχήμα. Ας σημειωθεί ότι δεν γνωρίζουμε τις διαστάσεις του πεδίου και ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η έξοδος του πλαισίου, οπότε μένουμε αυστηρά στο χρονικό διάστημα για το οποίο έχουμε πληροφορίες (0-2,5s).

- ii) Στο διάστημα από 0-2s όπου το πλαίσιο εισέρχεται στο πεδίο αναπτύσσεται πάνω του μια ΗΕΔ από επαγωγή:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B \cdot \beta \cdot x)}{dt} = -B \cdot \beta \cdot \frac{dx}{dt} = -B \cdot \beta \cdot v \quad \text{ή}$$

$$E = -v = -at = -0,4t \text{ (μονάδες στο S.I.)} \quad \text{με } 0 \leq t \leq 2\text{s}$$



Αντίθετα στη συνέχεια για $t > 2\text{s}$ η μαγνητική ροή παραμένει σταθερή, οπότε $E=0$.

Με βάση αυτά η ζητούμενη γραφική παράσταση έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος.

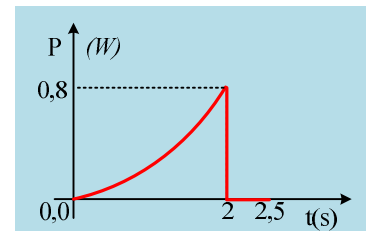
- iii) Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα παίρνουμε:

$$I = \frac{E}{R_{ολ}} = \frac{E}{R} = \frac{-0,4t}{0,8} = -0,5t \text{ (S.I.)}$$

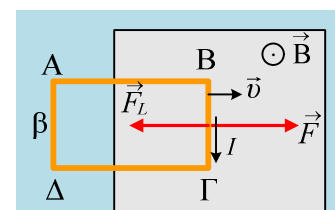
Για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 2\text{s}$, ενώ στη συνέχεια $I=0$. Οπότε για την ηλεκτρική ισχύ που εμφανίζεται στο κύκλωμα, έχουμε:

$$P = E \cdot I = (-0,4t) \cdot (-0,5t) = 0,2 \cdot t^2 \text{ (S.I.)} \quad \text{με } 0 \leq t \leq 2\text{s}$$

Ενώ στη συνέχεια μηδενίζεται. Έτσι η μορφή του διαγράμματος, είναι όπως στο διπλανό διάγραμμα.



- B) Για την χρονική στιγμή $t_1=1,5\text{s}$, η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι ίση με $E_1=-0,4t=-0,6\text{V}$, οπότε το πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I=-0,5t=-0,75 \text{ A}$, με φορά όπως στο σχήμα, αφού πρέπει η ασκούμενη από το πεδίο δύναμη Laplace, να αντιστέκεται στην είσοδο του πλαισίου στο πεδίο (κανόνας Lenz), να έχει δηλαδή φορά αντίθετη της ταχύτητας.



- iv) Το μέτρο της δύναμης Laplace είναι:

$$F_L = B \cdot I \cdot \beta = 2 \cdot 0,75 \cdot 0,5\text{N} = 0,75\text{N}$$

Εφαρμόζοντας τέλος το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική κίνηση του πλαισίου, παίρνουμε:

$$\Sigma F = m \cdot a \rightarrow F - F_L = m \cdot a \rightarrow$$

$$F = F_L + m \cdot a = 0,75\text{N} + 0,75 \cdot 0,4\text{N} = 1,05\text{N}$$

Όπου F η εξωτερική δύναμη που κάποιος πρέπει να ασκεί στο πλαίσιο στη διάρκεια της εισόδου, προκειμένου να επιβάλλει την συγκεκριμένη επιταχυνόμενη κίνηση του πλαισίου.

Όσον αφορά την (στιγμιαία) ισχύ της, θα έχουμε:

$$P_F = F \cdot v \cdot \sigma \nu \alpha = F \cdot v_I = F \cdot \alpha \cdot t_I = 1,05 \cdot 0,4 \cdot 1,5 W = 0,63 W.$$

v) Για την ισχύ της δύναμης Laplace έχουμε:

$$P_{FL} = F_L \cdot v \cdot \sigma \nu \alpha = - F_L \cdot \alpha \cdot t_I = - 0,75 \cdot 0,4 \cdot 1,5 W = -0,45 W$$

Ενώ η αντίστοιχη ηλεκτρική ισχύς στο κύκλωμα, η ισχύς της πηγής, είναι:

$$P_{\eta\lambda} = |E_I| \cdot |I_I| = 0,6 \cdot 0,75 W = 0,45 W$$

Αξιίζει να ερμηνεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα. Η δύναμη Laplace αφαιρεί μηχανική ενέργεια από το πλαίσιο με ρυθμό 0,45J/s και την μετατρέπει σε ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα.

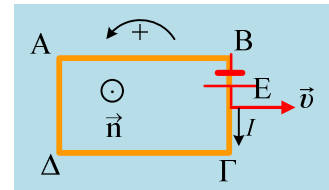
vi) Για τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του πλαισίου, θα έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{(F - F_L) dx \cdot \sigma \nu \alpha}{dt} = (F - F_L) \cdot v$$

$$\frac{dK}{dt} = (F - F_L) \cdot \alpha \cdot t_1 = (1,05 - 0,75) \cdot 0,4 \cdot 1,5 J/s = 0,18 J/s$$

Σχόλια:

1) Αν (όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενες αναρτήσεις) παίρνοντας την κάθετη στο πλαίσιο προς τα έξω, έχουμε θεωρήσει θετική φορά περιμετρικής διαγραφής, αυτή του σχήματος (αριστερόστροφη διαγραφή), τότε το αρνητικό πρόσημο στην ΗΕΔ ή στην ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, σημαίνει απλά ότι έχουν αντίθετη φορά...



2) Δυνάμεις Laplace δέχονται και οι δύο άλλες πλευρές του πλαισίου που βρίσκονται μέσα στο πεδίο. Απλά η συνισταμένη τους είναι μηδενική, αφού ασκούνται στα μέσα των αντίστοιχων τμημάτων, έχουν τις φορές που έχουν σημειωθεί στο σχήμα και έχουν μέτρα:

$$F_1 = F_2 = B \cdot I \cdot x$$

Όπου x τα μήκη των δύο πλευρών (AB και ΓΔ) που τη στιγμή αυτή βρίσκονται μέσα στο πεδίο.

3) Αν εξετάσουμε, από πιο κοντά το τι συμβαίνει με τις ενέργειες, βλέπουμε ότι τη στιγμή t_1 μεταφέρεται ενέργεια στο πλαίσιο, μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης F, με ρυθμό 0,63 J/s. Ένα μέρος της, ίσο με 0,45 J/s αφαιρούνται μέσω του έργου της δύναμης Laplace και εμφανίζονται ως ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα (και στην συνέχεια ως θερμική ενέργεια στον αντιστάτη R). Το υπόλοιπο (0,63-0,45)J/s=0,18J/s παραμένουν στο πλαίσιο αυξάνοντας την κινητική του ενέργεια.

